BÀI TOÁN (ví dụ trang 5)

Tính tích phân đường

$$\int_C y\,dx + (x+6y)\,dy$$

trong đó C là một đường bất kỳ đi từ $A(1,0)$ đến $B(2,1)$.

Không cho phương trình đường C

BƯỚC 0 – Nhận diện loại bài (cực kỳ quan trọng)

Biểu thức có dạng:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

$\rightarrow$ Đây là tích phân đường loại 2.
Nhưng:

- Không cho phương trình đường
- Không tham số hóa được

Chỉ còn 1 con đường hợp lý: kiểm tra xem có dùng Newton–Leibniz (trường bảo toàn) được không.

BƯỚC 1 – Viết trường vectơ

So sánh với dạng chuẩn:

$$\int_C P\,dx + Q\,dy$$

Ta xác định:

$$P(x,y) = y, \quad Q(x,y) = x + 6y$$

Trường vectơ:

$$\vec{F}(x,y) = (y,\, x+6y)$$

BƯỚC 2 – Kiểm tra điều kiện bảo toàn

Muốn dùng Newton–Leibniz, cần kiểm tra:

$$\frac{\partial P}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Tính từng đạo hàm:
Với $P = y$:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

Với $Q = x + 6y$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

Kết luận:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ Trường bảo toàn. $\Rightarrow$ Tồn tại hàm thế $f(x, y)$ sao cho:

$$\nabla f = \vec{F}$$

BƯỚC 3 – Tìm hàm thế $f(x, y)$

Theo định nghĩa:

$$\nabla f = (P, Q)$$

nên ta có hệ:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y \quad (2) \end{cases}$$

BƯỚC 3.1 – Giải phương trình (1)

Phương trình:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

Ý nghĩa: khi lấy đạo hàm của $f(x, y)$ theo x, kết quả ra y. Đảo chiều suy nghĩ: đạo hàm $\rightarrow$ nguyên hàm

$$f(x, y) = \int y \, dx$$

Vì đang tích phân theo x, y được coi là hằng số:

$$\int y \, dx = y \int dx = yx$$

Vì sao phải cộng thêm $D(y)$? Vì $\frac{\partial}{\partial x}(D(y)) = 0$. Mọi hàm chỉ phụ thuộc y đều biến mất khi đạo hàm theo x.

Nghiệm tổng quát:

$$f(x, y) = xy + D(y)$$

BƯỚC 3.2 – Dùng phương trình (2) để tìm $D(y)$

Nhắc lại phương trình (2):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 6y$$

Lấy đạo hàm theo y của $f(x, y) = xy + D(y)$:

$$\frac{\partial}{\partial y}(xy) = x, \quad \frac{d}{dy}D(y) = D'(y)$$

Do đó:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + D'(y)$$

So sánh với đề bài:

$$x + D'(y) = x + 6y \quad \Rightarrow \quad D'(y) = 6y$$

Giải tích phân:

$$D(y) = \int 6y\,dy = 3y^2 + C$$

Bỏ C (không ảnh hưởng tích phân đường).
Hàm thế hoàn chỉnh:

$$f(x, y) = xy + 3y^2$$

BƯỚC 4 – Áp dụng Newton–Leibniz

Công thức:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A)$$

Tính tại điểm cuối $B(2, 1)$:

$$f(2, 1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 = 2 + 3 = 5$$

Tính tại điểm đầu $A(1, 0)$:

$$f(1, 0) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0^2 = 0$$

Trừ:

$$\int_C y\,dx + (x + 6y)\,dy = 5 - 0 = 5$$

KẾT LUẬN CUỐI CÙNG

$$\int_C y\,dx + (x + 6y)\,dy = 5$$